

Juegos para colorear grafos

Manuel Delgado, Gregorio Hernández
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
Campus de Montegancedo, Boadilla del Monte, 28660 Madrid
gregorio@fi.upm.es

Resumen

En este trabajo se presentan aplicaciones informáticas de carácter lúdico y didáctico, que tienen como objetivo la comprensión de las estrategias para colorear grafos. La primera de ellas es un juego de dos jugadores (uno de ellos puede ser el ordenador) en el que, alternativamente, cada jugador colorea un vértice de un grafo previamente construido. Los colores se eligen de una lista adecuada para cada grafo. Vence el primer jugador si consigue que, en algún momento, el segundo jugador no disponga de ningún color válido para seguir coloreando el grafo. Si, por el contrario, el grafo se colorea correctamente, el vencedor es el segundo jugador. La segunda aplicación es también un juego de coloración de grafos, pero en esta ocasión se colorean las aristas.

Ambas aplicaciones disponen de un banco de grafos del que se elige uno en cada nuevo juego.

1. Introducción y definiciones

Hay muchos problemas, como la asignación de tareas y los problemas de almacenamiento, donde es necesario partir el conjunto de **vértices** (resp. aristas) de un grafo asociado de tal forma que **vértices** (resp. aristas) adyacentes pertenezcan a diferentes conjuntos de la partición. Tales particiones se interpretan en términos de colores, asignando a los elementos de cada parte un mismo **color**. Por esto se llaman **coloraciones** (resp. coloraciones de aristas).

Una **coloración** de un grafo $G=(V,A)$ es una asignación de colores a los vértices de G , a cada vértice un color, de forma que vértices adyacentes reciban colores distintos (por ejemplo ver [1] o [2]). Si se usan k colores diremos que es una **k-coloración**.

Llamamos **número cromático** de G al mínimo k para el G admite una k -coloración. Se designa por $\chi(G)$. Hallar el número cromático de

un grafo es un problema NP-completo, pero sí existen algoritmos eficientes que colorean los vértices de un grafo con “pocos” colores. Los más sencillos son los secuenciales: Dada una ordenación de los vértices del grafo, los algoritmos secuenciales asignan el mínimo color permitido a cada vértice. Es decir, si queremos colinear el vértice v , teniendo ordenados numéricamente los colores, asignamos a v el color más pequeño que no aparece entre los asignados a los vecinos de v ya coloreados. La ordenación es así esencial para colorear con pocos colores.

Una coloración de aristas de un grafo G es una asignación de colores a sus aristas de modo que aristas adyacentes reciban colores distintos. Si se usan k colores hablaremos de una **k-coloración** en aristas. Llamamos **índice cromático** de G al mínimo k para el que G tiene una k -coloración en aristas.

También es un problema NP-completo determinar el índice cromático de un grafo. Y los algoritmos conocidos para colorear las aristas de un grafo siguen las mismas estrategias que para la coloración de vértices.

A continuación se describen dos juegos de coloración de grafos concebidos como herramientas para comprender las estrategias adecuadas para colorear correcta y eficientemente un grafo, tanto sus vértices como sus aristas.

2. Coloreando vértices

En el primer juego que presentamos hay dos jugadores (uno de ellos puede ser el ordenador) que juegan alternadamente coloreando en cada turno un vértice no coloreado, de forma que el color asignado no coincida con ninguno de los colores asignados a los vértices adyacentes (vecinos). En el ejemplo de la figura 1, con la lista de colores {rojo, verde, azul}, el jugador “pepe” puede colorear el vértice indicado con una flecha sólo con el color verde.

El primer jugador vence si resulta imposible colorear correctamente un vértice. En la figura 2 tenemos esta situación, el vértice indicado con una flecha no se puede colorear correctamente.

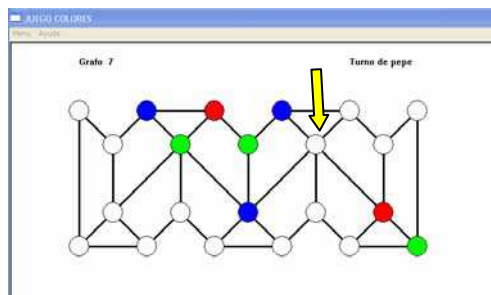


Figura 1.

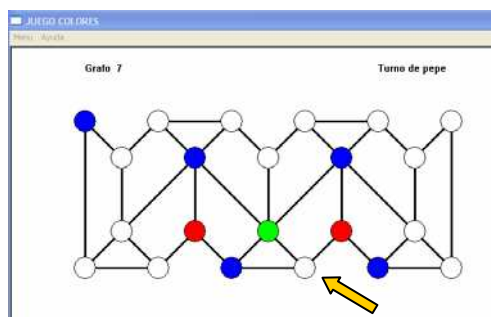


Figura 2.

Si, por el contrario se colorean correctamente los vértices del grafo, el vencedor es el segundo jugador.

3. Coloreando aristas

En el segundo juego se colorean las aristas de un grafo de forma que aristas adyacentes (con un vértice común) reciben distinto color. El juego sigue las mismas líneas que el descrito para vértices. Hay dos jugadores que alternadamente colorean las aristas utilizando los colores de una lista. El primer jugador vence si impide la correcta coloración de las aristas del grafo. Si se termina de colorear correctamente vence el segundo jugador.

4. Características comunes de las aplicaciones

Las aplicaciones informáticas descritas en los párrafos precedentes están implementadas en lenguaje Ada y se encuentran disponibles para su utilización en la página web: www.dma.fi.upm.es/gregorio/grafos/juegocolores.

En ella se encuentran enlaces para descargar ambas aplicaciones y el banco de grafos predefinidos sobre los que se realiza el juego.

El número de colores se puede elegir al comenzar el juego. Para colorear los vértices el número posible de colores permitidos está entre $\chi(G)$ y $\chi(G)+3$. El juego para las aristas permite elegir un número de colores entre Δ y $\Delta+3$, siendo Δ el grado máximo de los vértices del grafo. Se ha optado por permitir más colores de los realmente necesarios para poder elegir el nivel de dificultad del juego. Por el momento no hay niveles de dificultad que sí están previstos en una próxima versión.

5. Experimentación

Los juegos presentados en esta ponencia se han utilizado como herramienta adicional para la docencia en la asignatura de Matemática Discreta de primer curso en la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. La experiencia de cursos anteriores muestra que los alumnos que han jugado con las aplicaciones de coloración tienen una mejor comprensión de las diferentes estrategias de coloración de grafos. Esta herramienta viene a sumarse a otras ya desarrolladas para apoyo a la docencia en las asignaturas de Matemática Discreta y Teoría de Grafos en la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. La novedad es el carácter lúdico y de participación activa del alumno que se ha querido mostrar.

Referencias

- [1] Gross, J.; Yellen, J.: *Graph Theory and its Applications*. 2ª ed. CRC Press, 2005.
- [2] West, D.: *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2000.