# La Importancia de las Matemáticas en las Titulaciones Técnicas Universitarias

José Poveda
Dept. d'Informàtica
Univ. de València
46000 Valencia
e-mail: jose.f.poveda@uv.es

M. Carmen Juan
Dept. de Sistemas Informáticos y Computación
Univ. Politécnica de Valencia
46022 Valencia
mcarmen@dsic.upv.es

## Resumen

Las encuestas de evaluación de docencia en los estudios de Ingeniería Informática de la Universitat de València, ponen de manifiesto, repetidamente, que la valoración que los alumnos hacen de las asignaturas relacionadas con la matemática, son de las más bajas de la carrera. La motivación por tal disciplina es muy baja.

Este artículo invita a presentar en las aulas desde un punto de vista lúdico, algunas herramientas de gran interés en la resolución de problemas.

Este conjunto de herramientas matemáticas se presentan a través de pequeños ejemplos académicos que ponen de manifiesto su potencialidad en la resolución de problemas. Así como su utilidad para una mayor compresión de los mismos. Aunque la cuestión de fondo no es tanto la resolución del problema en sí, sino el hecho de que el alumno adquiera una disposición a aprender, a descubrir por sí mismo, que adquiera hábito en el planteamiento y resolución de problemas. Utilizando para ello un conjunto de estrategias clave que le aporte confianza en sí mismo a la hora de abordar la resolución de problemas.

## 1. Introducción

Las encuestas de evaluación de docencia en los estudios de Ingeniería Informática de la Universitat de València en los últimos años, ponen de manifiesto que la valoración que los alumnos hacen, en particular, de la asignatura de matemática discreta y en general de las asignaturas relacionadas con la matemática son de las más bajas.

El nivel de matemáticas y de motivación por ellas con la que van llegando los alumnos, producto de los nuevos planes de estudio de enseñanzas medias, resulta preocupante. Si en el anterior plan de estudios los alumnos aprendían a contar a través de la combinatoria impartida en 1º de BUP, primer año del plan, los actuales alumnos producto de la ESO llegan a la Universidad sin diferenciar, por ejemplo, entre combinación, variación y permutación.

Es notorio que algo está fallando en el actual plan de estudios de enseñanzas medias y que esto repercutirá en un futuro próximo, negativamente, en el nivel científico de nuestros investigadores. Desde un punto de vista social, según Antonio Martínez Naveira [4], presidente de la Real Sociedad Matemática Española, un país no puede conseguir un desarrollo científico de alto nivel ni puede pensar en un desarrollo industrial competitivo sin un desarrollo matemático fuerte de sus ingenieros e investigadores.

A parte de una revisión urgente de los currícula actuales en enseñanzas medias o de los procedimientos seguidos en la enseñanza de los mismos, desde la Universidad se debe abogar por una incentivación de la matemática como herramienta fundamental de trabajo en cualquier ciencia básica o disciplina técnica.

Teniendo en cuenta que el año 2000 ha sido declarado año de las Matemáticas, en esta propuesta, a falta de decisiones mayores, se intenta promover la matemática y el pensamiento matemático a través de ciertas estrategias lúdicas en la resolución de problemas. Con ello se pretende incentivar y habituar al alumno al razonamiento matemático como estrategia general en la resolución de cualquier tipo de problema lógico. Los problemas proporcionan la oportunidad de ejercitar las herramientas mentales que se poseen, de comprobar su alcance real, su adecuación a cierto tipo de problemas y sus limitaciones [5]. En definitiva, tal vez, lo más importante en la enseñaza en general y de la enseñanza de la matemática en particular, no sea tanto lo enseñado como la disposición que se transmita hacia el uso de estas enseñanzas [3].

En este sentido, parece interesante hacer una pequeña presentación de ciertas herramientas "útiles" en la resolución de problemas como son la geometrización, generalización, inducción y recursión. Con la generalización de problemas, se intenta plantear por una parte la filosofía docente "I do I understand**"** [6] donde tras el análisis y resolución del caso base, el alumno intente resolver una generalización del problema para una mayor compresión del mismo, y por otra parte como estrategia general en la resolución de problemas. La enseñanza de estrategias "lúdicas" en la resolución de problemas es una potente arma docente, que evita posibles actitudes negativas de los alumnos que quedan mentalmente bloqueados [2], por miedo a lo desconocido, prisa por llegar a una solución y apatía por la matemática.

## 2. Geometrización, particularización y generalización.

Se pasa a ver cómo la caracterización geométrica puede ser empleada como estrategia en la resolución de problemas. Se plantea calcular la suma de los números naturales siguientes:

$$1+2+3+\ \dots\ +n \tag{2.1}$$

si se calculan los primeros valores de la suma, lo que se podría denominar estrategia de particularización, se obtiene la siguiente sucesión de números

$$\begin{aligned}
&1=1\\
&1+2=3\\
&1+2+3=6\\
&1+2+3+4=10\\
&1+2+3+4+5=15\\
&1+2+3+4+5+6=21\\
&1+2+3+4+5+6+7=28\\
&1+2+3+4+5+6+7+8=36\\
&1+2+3+4+5+6+7+8+9=45
\end{aligned} \tag{2.2}$$

que poco dice del resultado en el caso general, pero que sí sugiere una caracterización geométrica de dicha suma [2]. Se considera por tanto la siguiente distribución de rectángulos

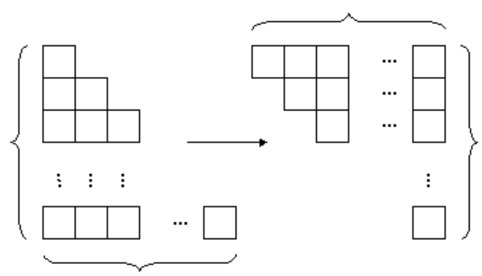

**Figura 1.** Caracterización geométrica de la suma de los n primeros números naturales

ambas distribuciones tienen, por la forma geométrica como se ha construido 1+2+3+ ... +n cuadrados, pero al juntarlos se obtiene un rectángulo de n+1 cuadrados de ancho y n cuadrados de alto. Por lo tanto llamando a la suma que se quiere calcular

$$S(n)=1+2+3+\ \dots\ +n \tag{2.3}$$

Se tiene que

$$2S(n)=n\,(n+1)$$

y por tanto

$$1+2+3+\ \dots\ +n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{2.4}$$

luego a través de una caracterización geométrica, utilizada como estrategia en la resolución del problema, se ha calculado una fórmula que proporciona la suma de los n primeros números naturales.

*El primero en calcular una expresión analítica para tal suma fue en su muy temprana infancia, allá por 1790, el príncipe de las matemáticas, Karl Friedrich Gauss. Cuenta la leyenda que hastiado el profesor por la falta de atención de los alumnos y el ruido infernal de fondo que había en clase, castigó a todos a permanecer en el aula sumando los 1000 primeros números naturales. Después de unos minutos, Gauss se levantó de su asiento y se dirigió hacia el profesor con un papel en la mano. El profesor, miró de reojo el papel, en el que, tras unos garabatos estaba escrita la cifra 500500. Absolutamente incrédulo, el profesor, abrió su libro de tablas de sumar comprobando que la suma de los 1000 primeros números efectivamente resultaba ser 500500. El profesor le preguntó entonces cómo lo había hecho y Karl explicó su razonamiento:*

*Si llamo S a la suma de los n primeros números naturales, después de reordenar sumandos, la suma seguirá siendo la misma, pues tengo un número finito de sumandos*

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ S(n) &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

luego sumando la igualdad de arriba y la de abajo, se obtiene que

$$2S(n) = n(n+1)$$

*y por tanto, despejando S, la suma de los n primeros números, en general vendrá dada por la expresión*

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

*que para el caso n=1000 resulta ser 500500.*

*Después de aquello, cuenta la leyenda que el profesor tiró los libros de sumar a la papelera y dijo a nuestro pequeño príncipe: "hijo mío, yo ya no te puedo enseñar nada más, el maestro eres tú".*

## 3. Inducción y recursión

La inducción matemática es una de las herramientas matemáticas más utilizadas para hacer demostraciones de todo tipo. En el caso del desarrollo de algoritmos repetitivos, como los que se ve en esta sección, también es una herramienta crucial ya que permite poder razonar sobre su corrección y coste.

El principio de inducción más básico es el denominado de inducción débil. Este principio sirve para demostrar propiedades definidas sobre el conjunto de los enteros.

### 3.1. Definición (inducción débil)

Si una propiedad es cierta para un valor base, b, y se puede demostrar que es cierta para cualquier valor k>b, simplemente suponiendo que es cierta para k-1, entonces es cierta para cualquier entero positivo.

Matemáticamente puede ser formulado como sigue, sea P:N→B una propiedad definida sobre N y b ∈ N, entonces

$$\left[P(b) \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)\ \forall k \in N\right] \Rightarrow P(n)\ \forall n \in N,\ n \geq b$$

que desde un punto de vista práctico, a la hora de hacer una demostración por inducción se tiene que tener en cuenta las siguientes tres partes:

**1.-**Base de inducción: Es necesario demostrar que la propiedad se cumple para un valor o para el valor mínimo del dominio sobre la que está definida ésta.

**2.-** Hipótesis de inducción: Se supone que la hipótesis es cierta para un valor k ∈ N.

**3.-**Paso de inducción: A partir de la hipótesis anterior, es necesario demostrar que la hipótesis es cierta para k+1.

Se demuestra por inducción la ec. 2.4 a la que se llega por diversos métodos y que proporciona la suma de los primeros n enteros positivos.

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Se plantea, en primer, lugar comprobar la hipótesis de inducción para el valor mínimo del dominio n=1, que calculado directamente da uno y según S(n)

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2}=\left|n=1\right|=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

luego se tiene que la base de inducción sí que se cumple. Se pasa pues a asumir la hipótesis de inducción

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2} \quad \forall k \in \mathrm{N}\,.$$

y seguidamente aplicando el paso de inducción se intenta demostrar que la relación también se cumple para k+1.
Se tiene pues, que el propósito es calcular

$$S(k+1)=1+2+3+4+\ldots+k+(k+1)$$

aplicando la hipótesis de inducción resulta

$$S(k+1)=S(k)+(n+1)=\cdots$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Luego efectivamente se cumple que

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n=k+1$$

y por tanto, se ha demostrado que

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in N$$

A veces en programación y en general en matemáticas surgen problemas cuya solución inmediata surge de forma recurrente, para verificar que tales soluciones son correctas la inducción es una herramienta de gran utilidad, así como para el cálculo del coste de dichos algoritmos.

En general, los planteamientos recursivos suelen tener un coste mayor que los iterativos, pero no siempre, de hecho, los mejores algoritmos de ordenación son de naturaleza recursiva.

Se plantea en este sentido calcular la potencia n-ésima de un número [1]. Dados dos enteros a>0, n≥0, la potencia $a^n$ se define como el producto de a por sí mismo n veces, excepto el caso $a^0=1$.

$$potencia(a,n): \mathrm{N}^{+} \times \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$$
$$(a,n) \rightarrow \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}$$

De esta definición, es inmediato expresar la función recursivamente. Expresada como función matemática quedaría como sigue

$$potencia(a,n)=\begin{cases} 1 & si\ n=0 \\ a \times potencia(a,n-1) & si\ n \geq 1 \end{cases}$$

que en notación algorítmica quedaría como sigue

```
{a>0,n≥0} Precondición
FUNCIÓN potencia(a,n,:Z):Z
  p:Z;
  IF
    n=0: devuelve 1;
    n≥1: devuelve a*potencia(a,n-1);
  FIN_IF
FIN_FUNCIÓN
{potencia(a,n)= ∏_{i=1}^{n} a} Postcondición
```

**Algoritmo 3.1:** Algoritmo O(n) para el cálculo de la potencia de un número

El coste de la función algorítmica propuesta, suponiendo que el producto * es de coste constante, O(n), es decir, proporcional al valor del exponente. El coste puede mejorarse planteando la siguiente recursión, conocida como estrategia divide y vencerás, y que consiste en reducir el problema a dos problemas iguales pero de tamaño mitad y así sucesivamente hasta la solución trivial. Si se hace un despliegue de las llamadas que en principio se harían de la función, se obtiene el siguiente árbol.

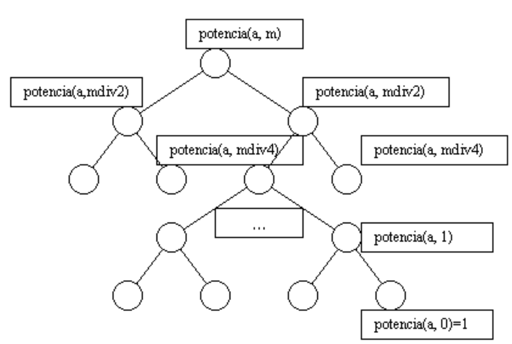


**Figura 3.1:** Despliegue de llamadas de la función potencia

donde la función de recurrencia vendrá dada por la relación

$$potencia(a,n) = \cdots$$

$$= \begin{cases} 1 & si\ \ n = 0 \\ (potencia(a, ndiv2))^2 & si\ \ n\ ?\ 1\ \ |\ n\ \ par \\ a \leftarrow (potencia(a, ndiv2))^2 & si\ \ n\ ?\ 1\ \ |\ n\ \ impar \end{cases}$$

que en notación algorítmica queda como

{a>0,n≥0} Precondición
**FUNCIÓN potencia**(a,n,:Z):Z
  p:Z;
  **IF**
    n=0: devuelve 1;
    n≥1 ∧ par : devuelve (potencia(a,ndiv2))$^2$;
    n≥1 ∧ impar : devuelve a*(potencia(a,ndiv2))$^2$;
  **FIN_IF**
**FIN_FUNCIÓN**
{potencia(a,n)= $\displaystyle\mathop{\subseteq}_{i=1}^{n}$ a}Postcondición

**Algoritmo 3.2:** Cálculo de la función potencia bajo una estrategia divide y vencerás

donde se pone de manifiesto [1] que esta nueva forma de abordar el problema ha rebajado el coste de éste a la altura del árbol, es decir, O($\log_2$n) frente a O(n) del anterior. Esto ha sido posible ya que por cada nivel del árbol se ha hecho una única llamada.

## 4.- Consideraciones finales

En este artículo, se ha presentado desde un punto de vista lúdico algunas herramientas de gran interés en la resolución de problemas. Estos pequeños ejemplos académicos ponen de manifiesto el interés de ciertas estrategias en la resolución de problemas, así como su utilidad para una mayor compresión de los mismos. Aunque la cuestión de fondo, el objetivo final, no es tanto la resolución del problema en sí, sino el hecho de que el alumno adquiera un hábito en el planteamiento y resolución de problemas. Así como un conjunto de estrategias clave con las que abordar la resolución de éstos.

Conceptos tan importantes en matemáticas como inducción y recursión, no son conceptos fácilmente asimilados por los alumnos de las diplomaturas, ingenierías o licenciaturas en Informática o de cualquier ingeniería en general. En realidad, el problema es incluso más preocupante, ya que la mayor dificultad que los alumnos encuentran en asignaturas de programación, a la hora de resolver problemas, no es tanto referente a las dificultades que presenta el propio lenguaje de programación, sino a la incapacidad de definir un proceso secuenciado y lógico que resuelva el problema. Es decir, no son capaces, partiendo del enunciado del problema, pensar en su resolución de una manera lógica, y por último, definir un algoritmo que lo resuelva. Este hecho se ha constatado en asignaturas de programación de los primeros cursos de las carreras técnicas universitarias. Concretamente en la titulación de Ingeniería Informática de la Universitat de València y en la de Ingeniero Industrial de la Universidad Politécnica de Valencia.

En estudios como los de diplomatura en Biblioteconomía y Documentación de la Universitat de València, donde la formación de los alumnos puede provenir de una enseñanza secundaria obligatoria enfocada a humanidades, la capacidad de abstracción y su buena disposición hacia asignaturas de programación es muy baja.

En general se detecta en las aulas de las nuevas generaciones, producto de los nuevos planes de estudio de enseñanza secundaria obligatoria, una falta de hábito, de curiosidad intelectual, de disciplina matemática.

## Referencias


[1] Casanova A. *Programación*. Universidad Politécnica de Valencia, 1993.

[2] José Luis Abreu. *Introducción a los conceptos de cálculo. Limusa, 1983.*

[3] G. Polya. *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, 1992.

[4] *Mètode (24):Temps de matemàtiques. Revista de difusió de la investigació. Universitat de València, 2000.*

[5] Miguel de Guzmán. *Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Editorial Pirámide, 1994.

[6] *Thirtieth SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education.* New Orleans, Lousiana, 1999.