

UTILIZACIÓN DE HOJAS DE CÁLCULO PARA LA ENSEÑANZA DE MODELOS MATEMÁTICOS EN FOTOGRAMETRÍA ANALÍTICA

J. Cardenal, J.E. Caracuel, J. Delgado, M. Torres

Dpto. Ingeniería Cartográfica, Geodésica y Fotogrametría.

Escuela Politécnica Superior. Universidad de Jaén.

c/ Virgen de la Cabeza, 2 - 23071 Jaén (España)

e-mail: jcardena@ujaen.es; caracuel@ujaen.es; jdelgado@ujaen.es; mtorres@ujaen.es

RESUMEN: Se presenta una aplicación sobre hojas de cálculo utilizada en la enseñanza de Fotogrametría Analítica en la Universidad de Jaén en las titulaciones de Ingeniería en Geodesia y Cartografía e Ingeniería Técnica Topográfica. Se han seleccionado 2 ejemplos: orientación externa de un par estereoscópico mediante el método de dos pasos y la calibración de una cámara mediante el método de las líneas rectas. Cabe señalar que pueden ser implementados otros modelos basados en la resolución de sistemas de ecuaciones mediante mínimos cuadrados. La utilización de las hojas de cálculo permite a los alumnos visualizar directamente las ecuaciones empleadas y la forma en la que las mismas son actualizadas en el proceso iterativo durante las sucesivas aproximaciones. Las hojas de cálculo actuales permiten una gran capacidad de cálculo que incluyen herramientas de gran utilidad (p.ej., álgebra matricial), dentro de un entorno gráfico de gran comodidad. Las ecuaciones pueden ser escritas mediante un editor de fórmulas y la resolución se facilita gracias al lenguaje de macros de cualquier hoja convencional.

1.- INTRODUCCIÓN

Una hoja de cálculo es una tabla compuesta por filas y columnas, en las que cada intersección se denomina celda. Cada celda almacena un valor numérico (dato) o fórmula (lógica/matemática). Los valores iniciales (observaciones u aproximaciones iniciales) constituyen la base de datos inicial, distribuidos en celdas individuales. Los cálculos y formulaciones pueden aplicarse al nivel de celda, fila, columna o bloques. Además, se pueden diseñar plantillas para la resolución de modelos matemáticos mínimos cuadrados (mm.cc.). En este trabajo se presentan algunos ejemplos desarrollados por los autores y empleados en la docencia de Fotogrametría Analítica (Ingeniería en Geodesia y Cartografía e Ingeniería Técnica Topográfica) en la Universidad de Jaén: una plantilla para la orientación externa de pares

estereoscópicos mediante el método de dos pasos y otra para la calibración de cámaras mediante el método de las líneas rectas.

2.- ORIENTACIÓN EXTERNA EN DOS PASOS

La Figura 1 muestra un ejemplo de plantilla para la orientación externa (OE) de un par estereoscópico (aéreo o terrestre) por el método de dos pasos. Esta plantilla está preparada para resolver la orientación del par con seis puntos de Von Gruber y cuatro puntos XYZ de apoyo. Además, permite calcular las coordenadas espaciales de cualquier otro punto medido en el modelo. Tras introducir los datos, se realiza la orientación relativa (mediante la condición de coplanaridad), luego se calculan las coordenadas modelo (mediante la condición de colinealidad) y se finaliza con la orientación absoluta (mediante una transformación 3D). La plantilla incluye macros para el cálculo iterativo de la condición de coplanaridad y la transformación 3D y, también, para establecer las aproximaciones iniciales.

a) Orientación Relativa (OR)

La OR del par se realiza mediante la condición de coplanaridad por el método dependiente (Ghosh, 1987). Este método fija la posición y orientación de la fotografía izquierda y el parámetro b_x (escala) del modelo. Los cinco parámetros libres son los giros de la cámara derecha (expresados como T, N y ϕ) y las componentes Y y Z de la base. Como observaciones se introducen los puntos de Von Gruber para las fotografías izquierda y derecha. También se incorpora la información sobre la distancia focal de la cámara empleada, la altura de vuelo (o la distancia objeto/cámara) y la base del modelo (b_x) introducida bien como fotobase o como la base aérea o terrestre.

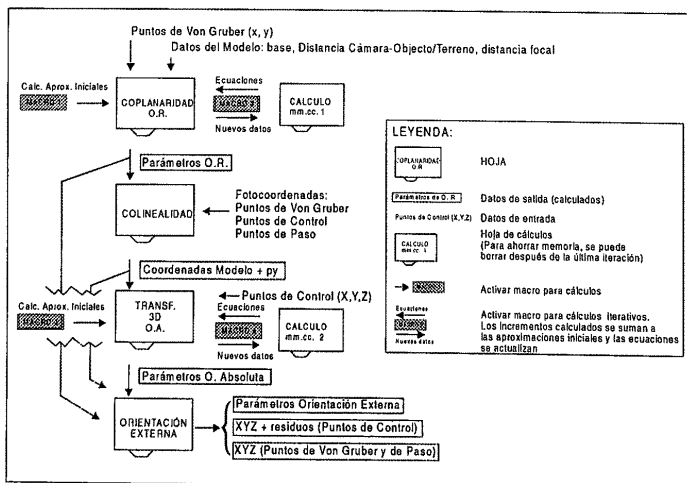


Figura 1. Diagrama de flujo de la plantilla de orientación externa.

Antes de realizar los cálculos se aplica una macro para inicializar la plantilla. Así, se borran datos previos y se asignan las aproximaciones iniciales ($T_2=N_2=6_2=b_Y=b_Z=0$). Las ecuaciones de coplanaridad linealizadas para los 6 puntos de Von Gruber tienen la forma general de:

$$[A]_{(6,24)}(V)_{(24,1)} + [B]_{(6,5)}(\Delta)_{(5,1)} = (-F_0)_{(6,1)} \quad (1)$$

Siendo $[A]=*(F)/*(\text{coordenadas medidas})$, matriz de coeficientes de residuos; $[B]=*(F)/*(\text{parámetros})$, matriz de coeficientes; $(-F_0)=F$ (función evaluada con observaciones y parámetros aproximados); (V) = vector de residuos de fotocoordenadas; $(\Delta)^T = (*T_2, *N_2, *6_2, *b_Y, *b_Z)$, vector de correcciones a los parámetros. La resolución de las ecuaciones se realiza por mm.cc. (Mikhail, 1976). Las correcciones a los parámetros se suman automáticamente a las aproximaciones iniciales, de forma que las ecuaciones se actualizan para las nuevas aproximaciones. Al mismo tiempo se realizan los cálculos de la varianza a posteriori y la desviación estándar de las variables calculadas. El criterio de convergencia del sistema de ecuaciones lo establece el propio usuario en función de la magnitud de las correcciones o de la varianza del ajuste.

b) Cálculo de las coordenadas modelo

La condición de colinealidad permite calcular las coordenadas modelo de los puntos de Von Gruber, de control y de paso medidos. Se realiza en una hoja diferente, pero ligada a la anterior. La expresión 2 muestra las ecuaciones de colinealidad para las coordenadas modelo (X_{Mi} , Y_{Mi} , Z_{Mi}) de la fotografía izquierda y derecha para un punto i.

$$\begin{pmatrix} X_{Mi} \\ Y_{Mi} \\ Z_{Mi} \end{pmatrix} = \frac{1}{k'} M_R^T \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -f' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ Z_0' \end{pmatrix}_{OR} = \frac{1}{k''} M_R^{''T} \begin{pmatrix} x_i'' \\ y_i'' \\ -f'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0'' \\ Y_0'' \\ Z_0'' \end{pmatrix}_{OR} \quad (2)$$

A partir de los factores de escala (k' y k''), los parámetros de OR y las fotocoordenadas izquierda y derecha se calculan las coordenadas modelo, junto con el paralaje residual (py) a escala modelo y fotografía. Para un punto i, cuyas fotocoordenadas ocupan cuatro celdas (de la misma fila), se necesitan seis celdas para calcular k' , k'' , X_{Mi} , Y_{Mi} , Z_{Mi} , $py_{(MODELO)}$ y $py_{(FOTO)}$. Sólo se requieren, pues, seis fórmulas (escritas previamente para el primer punto) y las referencias de los parámetros de la OR obtenidos de la primera hoja. Estas fórmulas se copian para el resto de los puntos.

c) Orientación Absoluta (OA)

La estructura de la hoja de la OA es similar a la de OR. Requiere dos macros para la obtención de las aproximaciones iniciales y la resolución mediante mm.cc. de la transformación tridimensional. Los valores de entrada son las coordenadas modelo (previamente calculadas) y las coordenadas terreno de cuatro puntos de apoyo XYZ. Estos puntos dan lugar a 12 ecuaciones con 7 incógnitas (factor de escala, tres giros y tres traslaciones). El modelo de la transformación rígida tridimensional es el mismo de Wolf (1983) y la expresión linealizada (sistema de ecuaciones de observaciones indirectas; Mikhail, 1976) para cuatro puntos:

$$[B]_{(12,7)}(\Delta)_{(7,1)} = (L)_{(12,1)} + (V)_{(12,1)} \quad (3)$$

donde [B]=*(F)/*(parámetros), es la matriz de coeficientes; (L)=Vector de discrepancia (coordenadas medidas-calculadas); (V)=Vector de residuos; (\square)^T=(*s*, *Σ*, *M*, *5*, *T_X*, *T_Y*, *T_Z*). vector de correcciones a los parámetros.

La aproximaciones iniciales se calculan activando una macro (la cual elimina también cálculos previos). El factor de escala inicial se estima a partir de la relación de distancias entre los dos primeros puntos en terreno/objeto y modelo, y los valores iniciales para los ángulos Σ y *M* se asignan a 0. El valor inicial de 5 (*5₀*) es estimado a partir de la diferencia de los arctg de los dos primeros puntos en espacio objeto (*X_t*, *Y_t*) y modelo (*X_m*, *Y_m*):

$$5_0 = \arctan((Y_t - Y_m)/(X_t - X_m)) - \arctan((Y_m - Y_m)/(X_m - X_m)) \quad (4)$$

Los tres vectores de traslación (*T_X*, *T_Y*, *T_Z*) se estiman a partir de las diferencias de los valores medios de las coordenadas *X*, *Y* and *Z* de todos los puntos en los espacios objeto y modelo.. A continuación una segunda macro resuelve el sistema mediante mm.cc. Los cálculos se realizan en una hoja aparte y las correcciones de cada iteración son sumadas a los parámetros iniciales. Los nuevos parámetros son copiados en la hoja activa en la posición apropiada de forma que las ecuaciones se actualizan nuevamente. Se procede así hasta terminar el proceso de orientación absoluta del modelo.

d) Orientación Externa (OE)

En la última hoja se resumen los datos más importantes de las hojas anteriores (parámetros de OR y OA y coordenadas modelo) y se calculan los parámetros de OE (posición y orientación de ambos fotogramas), así como las coordenadas en el espacio objeto para todos los puntos medidos en el modelo estereoscópico (figura 1).

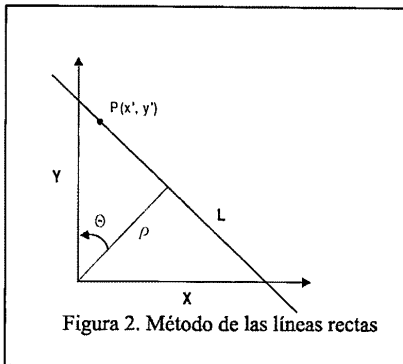
3.- CALIBRACIÓN DE CÁMARAS POR EL MÉTODO DE LAS LÍNEAS RECTAS

El método de calibración de las líneas rectas ("plumb line calibration"; Brown, 1971) establece que una línea recta en el espacio objeto es captada por una lente ideal (sin distorsión) como otra línea recta en el espacio imagen. Sin embargo, las lentes reales están afectadas de distorsión y las desviaciones que se aprecien en la fotografía respecto a una línea recta se consideran debidas a distorsión (si otros errores potenciales son debidamente corregidos o no considerados). Este es un método que permite calibrar sólo los parámetros de distorsión de la cámara. Así, una línea recta en un sistema 2D puede ser expresada de acuerdo con la ecuación 5 (figura 2):

$$x' \operatorname{sen}(\Theta_i) + y' \operatorname{cos}(\Theta_i) = \rho_i \quad (5)$$

Todo punto j perteneciente a una línea i (x'_{ij} , y'_{ij}) debe verificar la ecuación 1. Pero, si los puntos reales medidos sobre las líneas en las fotografías (x_{ij} , y_{ij}) no se ajustan a la expresión (por efecto de la distorsión radial simétrica y descentrado), aquellos pueden ser corregidos mediante los coeficientes de distorsión (ecuaciones 6a y 6b; ver Ghosh, 1987):

$$\left. \begin{aligned} x'_{ij} &= x_{ij}(1 - K_1 r^2) + \Delta x \\ y'_{ij} &= y_{ij}(1 - K_1 r^2) + \Delta y \end{aligned} \right\} (6a) \quad \left. \begin{aligned} \Delta x &= P_1(r^2 + 2x_{ij}^2) + 2P_2x_{ij}y_{ij} \\ \Delta y &= P_2(r^2 + 2y_{ij}^2) + 2P_1x_{ij}y_{ij} \end{aligned} \right\} (6b)$$



Donde K_1 es el coeficiente de distorsión radial simétrica y P_1 y P_2 son los coeficientes de distorsión de descentrado (Ghosh, 1987). El modelo de distorsión empleado no incluye coeficientes de grado superior a K_1 (no suelen ser significativos en cámaras no métricas de pequeño formato) o las coordenadas del punto principal de referencia (incluido en la distancia radial, r) ya que, de acuerdo con Brown (1971), es difícil de registrar con este método. Si las ecuaciones 6a y 6b son sustituidas en la expresión 5, se obtiene la ecuación de observación para cada punto j en una línea i de la forma:

$$f(x_{ij}, y_{ij}, K_1, P_1, P_2, \Theta_i, \rho_i) = 0 \quad (7)$$

Las incógnitas son los coeficientes de distorsión (K_1 , P_1 y P_2 , comunes a todas las ecuaciones) y los dos parámetros geométricos de cada línea (Θ_i y ρ_i , comunes a todas las ecuaciones de los puntos de una misma línea). Si se consideran más ecuaciones de observación que incógnitas el cálculo se realizará por ajuste mínimo cuadrático de las ecuaciones (previamente linealizadas por desarrollo en series de Taylor).

Este método requiere fotografiar un número suficiente de líneas (en la misma o en distintas imágenes). Se deben considerar al menos dos familias de líneas que mantengan con fuerte ángulo entre sí. Así, se pueden hacer dos fotografías en laboratorio para generar las 2 familias de líneas; la primera con las líneas verticales o subverticales (pueden ser hilos o cordeles elásticos lastrados, cuyos extremos se sumergen en aceite para evitar vibraciones); y la segunda con la cámara rotada unos 90° para captar las mismas líneas en posición "horizontal". El siguiente paso, consiste en medir fotocoordenadas de puntos sobre las líneas en las fotografías.

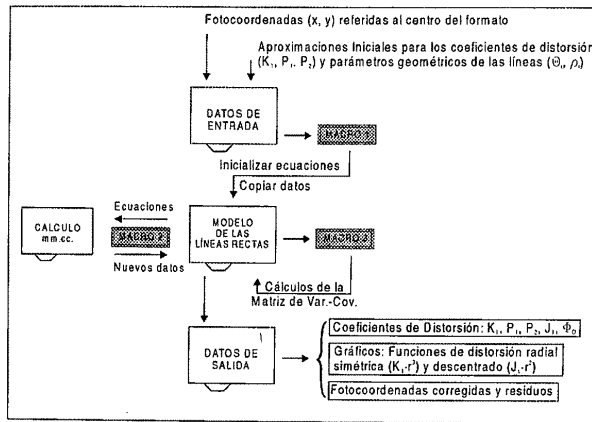


Figura 3. Diagrama de flujo de la plantilla del método de las líneas rectas. La leyenda es la misma de la figura 1.

La plantilla para el método de las líneas rectas se divide en 3 hojas (figura 3). La primera (entrada de datos) permite la introducción de las fotocoordenadas de 50 puntos medidos en 10 líneas (5 puntos por línea). También se introducen las aproximaciones iniciales de los coeficientes de distorsión y los parámetros geométricos de las líneas. Generalmente basta con aproximar $K_1=P_1=P_2=0$, $\Theta_1=90^\circ$ y 0° para las líneas verticales y horizontales respectivamente, y para ρ_1 se asigna el valor medio de abscisas (líneas verticales) u ordenadas (líneas horizontales). Activando una macro se borran los datos previos, se copian las aproximaciones iniciales y se actualiza el sistema de 50 ecuaciones y 23 incógnitas (3 parámetros internos y 20 geométricos: 2 por línea). El sistema de ecuaciones linealizadas se resuelve por mm.cc. tras varias iteraciones (3 ó 4 suelen ser suficientes). También, dado el entorno de trabajo, se representan gráficamente las funciones de distorsión radial simétrica ($dr_s = K_1 r^2$) y de descentrado ($d_p = J_1 r^2$, donde $J_1=[P_1^2 + P_2^2]^{0.5}$; Ghosh, 1987).

Una macro resuelve las ecuaciones por mm.cc. y los cálculos de los residuos y desviaciones standard de los parámetros calculados. La última hoja de cálculo (salida de datos, Figura 3) incluye la medida de puntos, corrección de fotocoordenadas y valores de distorsión de simetría radial y tangencial para cada punto.

4.- CONCLUSIONES.

Este trabajo ha mostrado como se pueden adaptar algunos de los modelos matemáticos habituales en fotogrametría en un entorno de hoja de cálculo. Ello conlleva varias ventajas dado que el alumno puede ver físicamente las ecuaciones y como funcionan los procesos de cálculo iterativo. Además la programación en lenguaje macro es simple y fácil (incluso para usuarios no habituados a este tipo de programas), por lo que los alumnos pueden desarrollar sus propias

plantillas antes de ser introducidos en lenguajes de programación avanzados (Fortran o C, p. ej.).

Si bien sólo se han mostrado dos ejemplos (método de dos pasos y calibración por líneas rectas) se pueden adaptar otros modelos matemáticos: orientación en un paso, cálculo de la transformación lineal directa (DLT), calibración "in situ" de una cámara por colinealidad o el método de Church, etc. (Cardenal et al., 2000). Todos estos modelos han sido empleados en las clases prácticas (y en algunos casos desarrollados por los propios alumnos) en las titulaciones de Ingeniería en Geodesia y Cartografía e Ingeniería Técnica Topográfica de la Universidad de Jaén. Las plantillas usadas en este trabajo se han preparado con Corel Quattro Pro (versiones 5.0 y 8.0; extensiones *.wbl y *.wb3), si bien pueden ser fácilmente adaptables a otras hojas de cálculo.

5.- REFERENCIAS.

- Brown, D.C., 1971. Close-Range Camera Calibration. *Photogrammetric Engineering*, 37(8): 855-866
- Cardenal, J., Delgado-García, J, Torres, M. (2000). On the use of spreadsheet for teaching analytical photogrammetry. *IAPRS*, Vol. 33, Part 5, Amsterdam (NL).
- Ghosh, S., 1987. *Analytical Photogrammetry*. Pergamon Press, NY, USA. 308 p.
- Mikhail, E.M., 1976. *Observations and Least Squares*. Harper & Row Pub. NY, USA. 497 p.
- Wolf, P.R., 1983. *Elements of Photogrammetry* 2nd ed. MacGraw Hill Pub. 628 p.