

Complementos de Matemáticas con Derive

Manuel José Fernández Gutiérrez
Dpto. de Matemáticas-Universidad de Oviedo
c) Calvo Sotelo s/n. 33007-Oviedo
Tfno.(98) 5103415 Fax(98) 5103354
E-mail: mjfg@pinon.ccu.uniovi.es

Resumen

En el presente trabajo se resume el trabajo llevado a cabo en la asignatura Complementos de Matemáticas correspondiente a la E.U.I.T. Informática de Oviedo. Más concretamente, se trata de enumerar algunos de los ejercicios que se proponen en las prácticas de laboratorio y en los exámenes prácticos con el programa Derive.

1. Introducción

Según el REAL DECRETO 1459/1990, de 26 de octubre (B.O.E. de 20 de Noviembre), en el que se establecen las directrices generales propias de los planes de estudio conducentes a la obtención del título oficial de Ingeniero en Informática, una de las materias troncales de obligatoria inclusión es: *Fundamentos matemáticos de la informática* que incluiría los siguientes contenidos: Álgebra, Análisis matemático, Matemática discreta y Métodos numéricos. Lo mismo se podría decir de los Decretos 1460 y 1461 en los que se establecen los títulos de Ingeniero Técnico en Informática de Gestión y de Sistemas.

Estas asignaturas se complementan con la siguiente: Complementos de Matemáticas, de tercer curso, sobre la que más adelante nos centraremos.

Los programas de estas asignaturas (<http://www15.uniovi.es/>) pueden y deben servir de base para otras titulaciones, con puntuales modificaciones. Hay temas que por su utilización en otras asignaturas son interesantes e importantes para unas carreras y para otras cumplirían "solamente" un objetivo formativo. Así, por ejemplo, las series de Fourier, son fundamentales para los alumnos de Informática y Telecomunicaciones y no tanto para otras carreras.

Pero, no podemos olvidar que estas disciplinas, aunque importantes para los alumnos de Informática, son un medio y no un fin. Por esta razón, en la elección y presentación de los temas se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones:

- a) Se debe proporcionar al alumno una formación matemática básica que le permita ampliar conocimientos, bien por motivos profesionales o por otros estudios.
- b) En el desarrollo de otras asignaturas, de carácter más específicamente informático, se precisan conocimientos matemáticos. Por este motivo, a lo largo de estos años, nos hemos puesto en contacto con profesores de otras áreas de conocimiento (Lenguajes y Sistemas Informáticos, Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Ingeniería Eléctrica, Tecnología Electrónica, Ingeniería de Sistemas y Automática, etc.) que imparten docencia en los estudios de informática de esta

Universidad, con el objeto de conocer con más detalle cuáles son los conceptos y las técnicas matemáticas que utilizan en las distintas asignaturas que constituyen la carrera. En la sección que hemos denominado Justificación de los Programas iremos desglosando, para algunas asignaturas, cuáles son estas necesidades.

Más adelante, pasaremos a exponer el programa de la asignatura Complementos de Matemáticas perteneciente al Nuevo Plan de Estudios (año 1991) de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Informática de Oviedo. Dicha asignatura tiene seis créditos (3 teóricos, 1.5 de prácticas de tablero y 1.5 de prácticas de laboratorio) y es obligatoria para los alumnos de la rama de Sistemas y optativa para los de Gestión (en el curso actual el número de alumnos es de 130 aproximadamente). Existen tres grupos para las prácticas de laboratorio cada uno de los cuales recibe una hora y media de laboratorio una semana sí y dos no.

Desde que se está impartiendo esta asignatura, a partir del curso 94-95, se ha utilizado el programa Derive en las prácticas de ordenador.

Respecto de la bibliografía a utilizar en las mencionadas prácticas, creemos que se han escrito buenos libros (algunos de ellos en lengua castellana) [2,3] que abarcan, preferentemente, los contenidos de los programas de matemáticas (Cálculo y Álgebra) de primer curso de Universidad de las carreras técnicas utilizando el programa Derive. Sin embargo, pensamos que existen ciertos temas que por estudiarse generalmente en cursos de ampliación están poco desarrollados con la utilización de la herramienta informática; así, por ejemplo, las sucesiones y series de funciones, las series de Fourier, la transformada de Laplace, etc. Al final del trabajo, hemos incluido algunos ejercicios, sobre los temas anteriores, que han sido propuestos en exámenes, realizados posteriormente en las prácticas de laboratorio y que creemos ponen de manifiesto que lo más importante es haber asimilado correctamente los conceptos matemáticos explicados en las clases teóricas (el manejo del programa solamente es condición necesaria para responder correctamente a lo que se pregunta).

Sin una adecuada selección de problemas a realizar, tendríamos que considerar los inconvenientes que del uso del ordenador se pueden derivar en el aprendizaje de la matemática. Así, por ejemplo, P.R.Halmos en un artículo de 1991 dice: "Así como la misma existencia de programas puede mejorar la calidad de nuestra enseñanza, al mismo tiempo ellos crean una fuerte posibilidad de reemplazar buena enseñanza por mala y, por tanto, han de usarse con sabiduría o no usarse en absoluto..... El ordenador proporciona la respuesta demasiado pronto, es decir, sin insistir en la necesidad de pensar primero. Despojar a un estudiante del placer de encontrar por sí mismo la solución y del gozo de hallar por sí mismo la victoria ante la dificultad es un mal proceso de aprendizaje". M. de Guzmán en un artículo titulado *La matematización de la cultura* (1988) escrito al margen de la lectura de *El sueño de Descartes* de P.J. Davis y R. Hersh apunta: "El ambiente del ordenador está constituido por recetas, lenguajes precisos, formalismos, donde lo que interesa es más lo operativo que el auténtico sentido de las operaciones..... No confundamos manipulación con sabiduría; Nuestros ordenadores nos hacen capaces actualmente de manipular con éxito fragmentos importantes de la realidad sin que comprendamos bien por qué".

2. Justificación de los programas

Teoría de Circuitos

Los conceptos de *integral* definida y de *derivada* se emplean para relacionar las dos variables (tensión y corriente) en los elementos de los circuitos bobina y condensador. Se emplean asimismo para calcular los valores medios y eficaces en determinadas funciones. Las relaciones de potencia y energía también necesitan de estos conceptos.

Otro conocimiento de Cálculo necesario son las *ecuaciones diferenciales* (lineales, de coeficientes constantes de primer y segundo orden) para el estudio de la respuesta transitoria de los circuitos eléctricos. Se ensayan soluciones particulares del tipo constante (escalón de tensión) o bien funciones senoidales.

También se utiliza la *transformada de Fourier* de funciones periódicas no senoidales

Tecnología Electrónica de Computadores

Los *números complejos* son utilizados para el análisis de circuitos a los que se les aplica señales senoidales en régimen permanente.

Las tensiones y corrientes son generalmente funciones no lineales (del tiempo) y, por lo tanto, su *representación gráfica* exige unos conocimientos de curvas.

La representación de la ganancia de tensión en función de la frecuencia se realiza en una escala semilogarítmica.

La respuesta de un circuito lineal a una excitación implica siempre la resolución de una *ecuación diferencial lineal* de un orden que depende del número de elementos reactivos del mismo.

Estructuras de Datos y de la Información

El alumno que cursa esta asignatura de segundo curso debe tener claro la noción de *límite* y la *representación de curvas en el plano* para analizar la complejidad de un algoritmo.

Sistemas de Gestión de Bases de Datos

Se utilizan las *series, derivadas y máximos y mínimos* en los cálculos de rendimientos y eficiencia, es decir, en el tiempo medio de búsqueda y acceso de información en la base de datos dependiendo de los algoritmos, estructuras y soporte físico existente.

Redes de Computadores

Se utilizan las *ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes* en las ecuaciones de las líneas de Transmisión y sus parámetros. Asimismo hacen uso de las *series de Fourier*.

Economía

Para la 'teoría del consumo', es decir, el estudio del comportamiento del consumidor se utilizan las *derivadas parciales*.

El cálculo de los *máximos y mínimos* se usa en la maximización del beneficio en los distintos mercados. También la *integración* se aplica para el cálculo del excedente del productor y del consumidor.

3. Complementos de Matemáticas: Programa

Tema 0.-Visión general del programa Derive

Carga del Derive. Teclas fundamentales. Funciones, constantes y operadores. Estructura del Derive. Comandos de álgebra: Author, Build, Calculus, Declare, Expand, Factor, soLve, Options, Simplify, approX. Comandos de dibujo: Plot. Comandos de transferencia y comunicación: Help, Jump, Manage, Quit, Remove, Transfer, moVe, Window.

Práctica I: Introducción general al uso de Derive. Algunas precisiones y limitaciones de Derive.

Práctica II: Problemas del álgebra lineal.

Práctica III: Sucesiones y series numéricas.

Tema 1.- Sucesiones y series de funciones.

Convergencia puntual y convergencia uniforme de una sucesión (serie) de funciones. Propiedades de la convergencia uniforme. Criterio M de Weierstrass.

Práctica IV: Sucesiones y series de funciones

Tema 2.- Series de potencias y series de Fourier.

Convergencia de una serie de potencias: radio de convergencia. Desarrollo de una función en serie de potencias. Serie de Fourier. Propiedades. Teorema de Dirichlet.

Práctica V: Polinomios de Taylor. Series de potencias y series de Fourier.

Tema 3.-Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definiciones. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y primer grado. Tipos de ecuaciones diferenciales: de variables separadas, homogéneas, de fracciones lineales, lineales de primer orden, de Bernoulli, de Riccati, exactas, de factor integrante. Ecuaciones diferenciales de segundo orden: ecuaciones en las que falta la variable dependiente "y", ecuaciones en las que falta la variable independiente "x", ecuaciones en las que faltan "x" e "y", ecuaciones en las que faltan "y" y "x", ecuaciones lineales de segundo orden. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes.

Práctica VI: Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. FICHERO ODE1.MTH

Práctica VII: Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. FICHERO ODE2.MTH

Tema 4.- Métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Métodos de Taylor. Métodos de Runge-Kutta.

Práctica VIII: Resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. FICHERO ODE_APPR.MTH

Tema 5: Transformadas de Laplace.

Introducción. Algunos comentarios teóricos. Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales. Propiedades generales de la transformada de Laplace. FICHERO INT_APPS.MTH

Práctica IX: Programando con Derive: resolución numérica de ecuaciones no lineales, integración numérica.

4. Evaluación

A lo largo del curso se realiza un examen parcial y un examen final. Cada examen consta de dos partes: una primera prueba escrita de tipo "tradicional" que supone el 45% del total; el alumno que supere este ejercicio tendrá la opción de presentarse a un segundo que cada alumno realizará de forma individual con un ordenador (y el programa Derive) y cuya valoración es también el 45% del total. El 10% restante se basará en una serie de prácticas que los alumnos hacen en horas no lectivas y son condición necesaria para aprobar la asignatura.

5. Algunos ejercicios propuestos en los exámenes

1)

a) Definir dos funciones Derive que sirvan para comprobar si una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es exacta u homogénea respectivamente.

b) Determinar, haciendo uso de dichas funciones, si para determinados valores de "n" la ecuación diferencial siguiente es de los dos, de alguno, o de ninguno de los tipos anteriores. Resolverla cuando proceda.

$$\frac{2ny^2 - nx^2}{4xy^2 - x^3} dx + \frac{4ny^2 - x^2}{4y^3 - x^2y} dy = 0$$

2) Definir una función DERIVE de nombre *Taylor2* que implemente el método de Taylor de orden 2 y utilizarla para resolver el problema de valor inicial:

$$y' = y + xy^5, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = 1 \quad h=0.5$$

3) Obtener, de dos maneras distintas, la transformada de Laplace de la función:

$$f(x) = x^2 \cdot \cos(5x) \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad f(x) = 1 \quad x > \pi$$

- Usando alguna función incluida en los ficheros de utilidades.
- Usando solamente funciones no incluidas en los ficheros de utilidades.

4) Se sabe que si $L[f(x)] = F(p)$ entonces:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} F(p) dp$$

suponiendo que ambas integrales sean convergentes. Calcular la integral siguiente:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-3x} - e^{-2x} + \exp(-x) \cdot \text{sen}(7x)}{x} dx$$

5) Hallar la transformada inversa de Laplace de la función:

$$\frac{3p^6 - 33p^5 + 138p^4 - 247p^3 + 101p^2 + 210p - 196}{p^7 - 15p^6 + 94p^5 - 318p^4 + 625p^3 - 711p^2 + 432p - 108}$$

6)

$$\text{Sea } f_n(x) = nx(1-x)^n \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Dibuja las gráficas de las funciones correspondientes a $n = 1, 2, 3, 4, 19, 30$ y a la vista de tales representaciones, ¿Cuál te parece que es la función f límite puntual?. Calcula los valores de f_n en los puntos $-10^{-2}, 10^{-2}, 1.99, 2$ para $n = 10, 10^3, 10^4$ ¿Es coherente lo que se ha obtenido con la posible función límite?.

b) Obtener, de manera formal, la función límite puntual para los distintos valores de x . ¿Qué problemas se te han presentado con la declaración de las variables?. ¿Cómo los has solucionado?.

c) Calcular $\sup |f_n(x) - f(x)|$, para los distintos valores de "n", en los intervalos $[0,1]$ y $[0.4,1]$. Generalizar en lo posible los resultados anteriores para un intervalo de la forma $[a,1]$ con $0 < a < 1$.

¿Qué se puede afirmar sobre la convergencia uniforme en los intervalos mencionados a tenor de lo obtenido?.

d) Calcular $\sup | f_n(x) - f(x) |$, para los distintos valores de "n", en el intervalo $[0,1, 1,5]$. ¿Es uniforme la convergencia?.

Bibliografía

- [1] Fernández Gutiérrez, M.J.: *Algunas precisiones y limitaciones de Derive*. Actas de las Jornadas sobre Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad (TEMU-95). Barcelona (1995), 115-122.
- [2] García, A. (Eds.): *Prácticas de Matemáticas con Derive*. Clagsa. Madrid.1994.
- [3] Llorens Fuster, J. L.: *Aplicaciones de Derive. Análisis Matemático-I (Cálculo)*. Universidad Politécnica de Valencia. 1993.
- [4] Población Sáez, A.J.: *Una práctica con Derive*. Epsilon (Revista de la S.A.E.M. "Thales") nº27. 1993